Enoncé

Soit $g(x) = x^2 e^{1-x}$

1) Domaine de définition
2) Limites aux bornes du domaine de définition
3) Calculer g' et donner le tableau de variation

Domaine

Il n'y a aucune contrainte : le domaine est $\mathbb{R}$

Limites aux bornes

$$g(x) = x^2 e^{1-x} = x^2 e^1 e^{-x} = e(x^2 e^{-x})$$

En $-\infty$:

$x \to -\infty$

$x \cdot x = x^2 \to -\infty \cdot -\infty = +\infty$

$-x \to -(-\infty) = +\infty$

$e^{-x} \to +\infty$

$x^2 e^{-x} \to +\infty \cdot +\infty = +\infty$

$e x^2 e^{-x} \to e \cdot +\infty = +\infty$

Par conséquent

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} g(x) = +\infty}$$

En $+\infty$:

$x \to +\infty$

$x \cdot x = x^2 \to +\infty \cdot +\infty = +\infty$

$-x \to -\infty$

$e^{-x} \to 0$

$x^2 e^{-x} \to +\infty \cdot 0 = indéterminé$

Pour lever l'indétermination utilisons la règle de l'Hospital :

Si $\lim f = +\infty$ *et* $\lim g = +\infty$ *alors* $\lim \frac{f}{g} = \lim \frac{f'}{g'}$

$x^2 e^{-x} = \frac{x^2}{e^x}$

avec $x^2 \to +\infty$ et $e^x \to +\infty$

Donc

$$\lim \frac{x^2}{e^x} = \lim \frac{2x}{e^x}$$

avec $2x \to +\infty$ et $e^x \to +\infty$

La forme est toujours indéterminée, on applique donc la règle à nouveau

$$\lim \frac{2x}{e^x} = \lim \frac{2}{e^x} = 0^+$$

Donc

$$x^2 e^{-x} \underset{+\infty}{\to} 0^+$$

$$e x^2 e^{-x} \underset{+\infty}{\to} e \cdot 0^+ = 0^+$$

Par conséquent

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0^+}$$

Variations

$$g(x) = x^2 e^{1-x} = e x^2 e^x$$

$$g'(x) = 2x e^{1-x} - x^2 e^{1-x} = (2x - x^2) e^{1-x}$$

Par conséquent

$$\boxed{g'(x) = x(2-x)e^{1-x}}$$

On sait que $\forall X \; e^X > 0$

Donc, $\forall x \; e^{1-x} > 0$

Par ailleurs, $g(2) = 2^2 e^{1-2} = 4e^{-1} = \frac{4}{e}$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
x		-	0	+		+	
$2-x$		+		+	0	-	
e^{1-x}		+		+		+	
$g'(x)$		-	0	+	0	-	
$g(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$\frac{4}{e}$	↘	0

Représentation Graphique